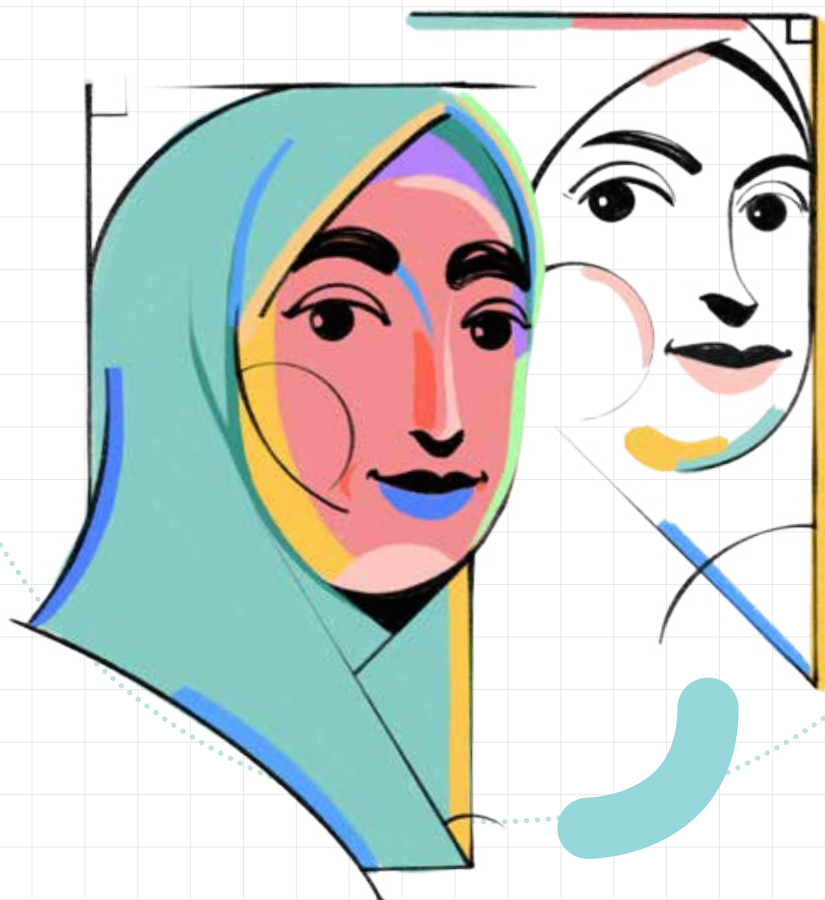




ریاضی به روش گفت و گو

● خسرو داودی و آرش رستگار

قسمت اول: توسعه نظریه‌ها به کمک شباهت‌ها با نظریه‌های دیگر

خانم نظری به شباهت دو فرمول که یکی دربارهٔ عددهای طبیعی و دیگری مربوط به مجموعه‌هاست اشاره کرد. او گفت: «برای دو مجموعه A و B که تعداد اعضای آن‌ها متناهی باشند، داریم:

$$\#(A \cap B) + \#(A \cup B) = \#A + \#B$$

که در آن منظور از $\#A$ تعداد اعضای مجموعهٔ متناهی A است. همین‌طور برای دو عدد طبیعی a و b داریم:

$$(a, b)[a, b] = ab$$

که در آن (a, b) نمایندهٔ بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و b و $[a, b]$ نمایندهٔ کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌هاست. آیا شما هم متوجه شباهت این فرمول‌ها می‌شوید؟ این شباهت را دقیق‌تر بررسی کنید و بگویید به خاطر این شباهت، نظریهٔ اعداد از نظریهٔ مجموعه‌ها چه می‌آموزد و برعکس نظریهٔ اعداد به نظریهٔ مجموعه‌ها چه یاد می‌دهد.»

طهورا و صفورا همیشه با هم درس می‌خواندند و با هم به مسئله‌ها فکر می‌کردند. حتی گاهی از هم درس می‌پرسیدند. پدر و مادرهای آن‌ها به ایشان اجازه می‌دادند که برای درس خواندن بعد از مدرسه به خانهٔ هم بروند. آخر مادر طهورا و مادر صفورا دوستان صمیمی بودند. خانم نظری هم از دوستی

آنان آگاه بود و به آنان اجازه می‌داد در کلاس درس مباحثه کنند. بچه‌های دیگر هم از این مباحثه‌ها چیزهای زیادی یاد می‌گرفتند. طهورا و صفورا هر دو بسیار با هوش و خلاق بودند. **طهورا** این‌طور شروع کرد: «در نظر اول اگر بخواهم این دو فرمول را شبیه ببینم، ناچارم بعضی مفاهیم در یک طرف را با بعضی مفاهیم در طرف دیگر یکی بگیرم یا متناظر فرض کنم. مثلاً تعداد اعضای یک مجموعه در طرف دیگر با یک عدد متناظر است که البته هر دو از جنس عدد هستند. اما اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها، حتی قبل از اینکه تعداد اعضای آن‌ها را بشماریم، به نظر می‌رسد شبیه k, m, n و b, m, n هستند. روشن است که عمل جمع در فرمول مجموعه‌ها با عمل ضرب در فرمول عددهای طبیعی متناظر شده‌است.»

صفورا: به نظرم شباهت‌هایی که گفتی و تناظرهایی که برقرار کردی ظاهری هستند و خیلی عمیق نیستند. اگر بگویم چرا چنین چیزی را با چنان چیزی متناظر کردی، تصور می‌کنم حرف زیادی نداشته باشی بزنی. به‌غیر از

تناظر اجتماع و اشتراک با k, m, n و b, m, n . بعضی از ابعاد شباهت آن‌ها را می‌فهمم. مثلاً اجتماع که می‌گیریم مجموعه‌ها بزرگ می‌شوند و اشتراک که می‌گیریم مجموعه‌ها کوچک می‌شوند. درست مانند k, m, n و دو عدد که از آن‌ها بزرگ‌تر است و b, m, n دو عدد که از آن‌ها کوچک‌تر است. ضمناً فرمول دیگری به یاد می‌آید که در مورد عددهای طبیعی است، اما حتی از فرمول خانم نظری در مورد k, m, n و b, m, n به فرمول نظریهٔ مجموعه‌ها شبیه‌تر است. آن فرمول این است که برای هر دو عدد a و b داریم: $\max(a, b) + \min(a, b) = a + b$.

طهورا: چه فرمول جالبی گفتی! از دیده پنهان مانند که فرمول تو برای هر دو عدد، حتی اگر عددهای طبیعی هم نباشند، برقرار است؛ همان‌طور که فرمول مجموعه‌ها برای هر دو مجموعهٔ متناهی برقرار است. در حالی که فرمول‌های k, m, n و b, m, n فقط برای عددهای طبیعی برقرارند. ضمناً در فرمول شما مجبور نیستیم به جای عمل جمع، عمل ضرب را قرار دهیم که البته شباهت فرمول‌ها را به هم نزدیک می‌کند.

خانم نظری: بگذارید در بحث شما کمی دخالت کنم. ما برای بررسی شباهت

و آن را به صورت زیر نشان می‌دهند:

$$x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow f(x)$$

یعنی با وارد شدن x ماشین f کاری انجام می‌دهد تا خروجی $f(x)$ به دست آید. $f(x)$ یعنی عضو وابسته به x توسط f . به زبان مجموعه‌ها می‌توان نشان داد که ورودی از چه مجموعه عددی است و خروجی از چه مجموعه‌ای. تابع را به این صورت نشان می‌دهیم: $f: A \rightarrow B$. یعنی تابع (یا ماشین) f ورودی‌ها را در مجموعه A می‌گیرد و خروجی‌ها را مجموعه B را تشکیل می‌دهند. اگر قرار باشد مجموعه‌های A و B زیرمجموعه‌های مجموعه مرجعی مانند M باشند، وزن دادن به اعضای A می‌شود تابعی به عددهای طبیعی یا عددهای صحیح یا عددهای حقیقی $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ که وزن هر عضوی مثبت است. می‌توان f را با مقدارهای صفر در بیرون A توسعه داد و تابعی روی همه مجموعه مرجع را به دست آورد: $f: M \rightarrow \mathbb{R}$.

اگر f روی مجموعه A مقدار یک و بیرون آن مقدار صفر را بگیرد، f به ما همان نظریه مجموعه‌های معمولی را می‌دهد. اگر f بتواند مقدارهای طبیعی را هم بگیرد، همان مدلی را می‌دهد که برای اعضای مجموعه تکرار قائل شدیم. در هر صورت برای هر دو تابع $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم:

$$\max(f, g)(m) = \max(f(m), g(m))$$

$$\min(f, g)(m) = \min(f(m), g(m))$$

در این صورت $\max(f, g)$ و $\min(f, g)$ هم تابع‌هایی روی M هستند و در فرمول زیر صدق می‌کنند:

$$\max(f, g) + \min(f, g) = f + g$$

اگر مقدارهای تابع‌ها را به $\{0, 1\}$ محدود کنیم، فرمول

$$n(A \cap B) + n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

را می‌دهد. اگر دامنه را عددهای اول بگیریم و مقدارها را در $\{0, 1\}$ فرمول $(a, b)[a, b] = ab$ را می‌دهد. شما با نظریه جدید خود، دو نظریه قبلی را به هم پیوند داده‌اید.

و b عددهای گویا باشند هم می‌توان نوشت: $b = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}$ و $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ که در آن α_i و β_i عددهای صحیحی هستند، نه فقط عددهای طبیعی نامنفی!

سوم اینکه تو نظریه مجموعه‌ها را متحول کردی و همه دنیا را به هم ریختی. اگر برای اعضای یک مجموعه تکرار قائل شویم، یعنی بگوییم هر عضو $x \in A$ مثلاً n_x بار تکرار شده، باز هم می‌توان اجتماع و اشتراک را تعریف کرد:

$$A \cap B = \{x | x \in A, x \in B\}$$

اگر x در A تکرار n_x در B تکرار m_x باشد، آنگاه تکرار در $A \cap B$ را قرار می‌دهیم: $\min(n_x, m_x)$. همین‌طور تکرار x در $A \cup B$ را قرار می‌دهیم: $\max(n_x, m_x)$. باز هم رابطه

$n(A \cap B) + n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ برقرار است؛ به شرط اینکه تعداد اعضای یک مجموعه را با احتساب تکرار حساب کنیم. یعنی مجموع تکرارهای اعضای مجموعه را تعداد اعضای آن بگیریم.

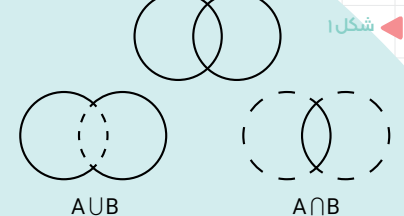
صغور: خب شما می‌توانستی تکرار تعداد اعضای یک مجموعه را عدد صحیح هم بگیری! تازه فرمول $\min(\alpha_i, \beta_i) + \max(\alpha_i, \beta_i) = \alpha_i + \beta_i$ برای α_i و β_i حقیقی دلخواه هم برقرار است. پس تکرار اعضای مجموعه را هم می‌توان عددهای حقیقی دلخواه گرفت.

خانم نظری: آفرین بر شما نظریه‌پردازان بزرگ! حالا من به شما می‌گویم که ریاضی‌دانان حرف‌های شما را چگونه قبلاً فرمول‌بندی کرده‌اند. شما در دوره ابتدایی با ماشین ورودی و خروجی آشنا شده‌اید. برای معرفی عبارت‌های جبری هم از آن در پایه هفتم استفاده کرده‌اید. برای مثال ماشین زیر، ورودی یعنی a را می‌گیرد و آن را دو برابر می‌کند. خروجی برابر $2a$ می‌شود:

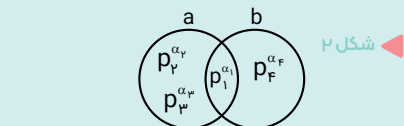
$$a \rightarrow \boxed{\times 2} \rightarrow 2a$$

در سال‌های بعد یاد می‌گیرید که در ریاضی به این ماشین «تابع» می‌گویند

نظریه‌ها ابزارهایی داریم. یکی از ابزارها باز فرمول‌بندی یک نظریه است. مثلاً شما فرمول $\#(A \cap B) + \#(A \cup B) = \#A + \#B$ را می‌توانید به زبان نمودار ون بیان کنید (شکل ۱).



طهور: نظریه اعداد را هم می‌توانم به زبان نمودار ون ترجمه کنم (شکل ۲).

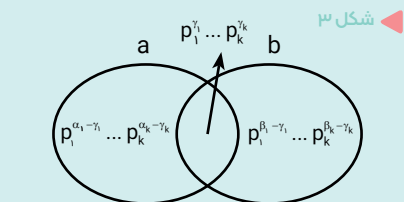


فرض کنید: $b = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}$ و $a = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3}$ در این صورت:

$$[a, b] = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} p_4^{\alpha_4} \text{ و } (a, b) = p_1^{\beta_1}$$

صغور: می‌توانم آنچه را که طهورا گفت به حالت کلی تعمیم دهم:

اگر $b = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}$ و $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ که در آن $\alpha_i \geq 0$ و $\beta_i \geq 0$ ، آنگاه: $[a, b] = p_1^{\gamma_1} \dots p_k^{\gamma_k}$ و $\gamma_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$ در آن: $[a, b] = p_1^{\delta_1} \dots p_k^{\delta_k}$ و $\delta_i = \min(\alpha_i, \beta_i)$ که در آن: $\delta_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$ و شکل نمودار ون به شکل ۳ خواهد بود.



طهور: عجب چیزی گفتی و چه حرف‌هایی زدی! ایده‌ها مثل سیلاب به ذهنم فرومی‌ریزند. یکی اینکه با توجه به آنچه گفتی، فرمول $(a, b)[a, b] = ab$ می‌شود همان فرمول $\min(\alpha_i, \beta_i) + \max(\alpha_i, \beta_i) = \alpha_i + \beta_i$ قبلاً اشاره کرده بودی. چه تیری در تاریکی رها کردی و به هدف هم زدی! دوم اینکه با این تعریفی که از ک.م.م و ب.م.م برحسب تجزیه a و b به عددهای اول ارائه کردی، می‌توان ک.م.م و ب.م.م عددهای گویا را تعریف کرد. چرا که اگر a